**Лекція №6**

***Рекурсивно перелічимі множини***

Множина чисел *А* називається рекурсивно перелічимою (РПМ), якщо існує двомісна ПР функція *f*(*a*, *x*) така, що рівняння *f*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок x тоді і тільки тоді, коли *a* ∈ *A*.

**Наслідок**. Множина чисел *А* рекурсивно перелічима тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм, який для довільного *n* ∈ *N* дає відповідь на питання *n* ∈ *А*, якщо *n* дійсно належить *А*, або працює нескінченно довго, якщо *n* ∉ *А*.

**Теорема 6.1.** Кожна ПР множина є рекурсивно перелічимою.

Доведення. Існує алгоритм

function *g*(*n*)

begin

*i* = 0

while *f*(*n*) ≠ 0

do *i* = *i* + 1

*g* = 0

end,

який обчислює часткову характеристичну функцію *g* ПР множини.

**Теорема 6.2.** Нехай *F*(*a*, *x*) – ПР функція від змінних *a*, *x*. Множина *М* тих значень параметра *а*, для яких рівняння

*F*(*a*, *x*) = 0

має хоча б один розв’язок *x*є РП множиною.

Доведення. Часткова характеристична функція множини *М* обчислюється наступним алгоритмом:

function χ*M* (*а*)

begin

*i* = 0

while *F*(*a*, *i*) ≠ 0

do *i* = *i* + 1

χ*M* = 0

end.

**Теорема 6.3.** Непуста множина *A* РП множина ⇔ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Необхідність (множина *А* значень ПРФ *f*(*x*) є РПМ). Дійсно, часткова характеристична функція множини *А* може бути обчислена алгоритмом:

function χ*A*(*a)*

begin

*i* = 0

while *f*(*i*) ≠ *a*

do *i* = *i* + 1

χ*A* = 0

end.

Достатність (якщо множина *А* – РПМ, то співпадає з множиною значень деякої ПРФ). Розглянемо функцію, яка обчислюється алгоритмом

function *f*(*n*)

begin

if *F*(***l***(*n*), ***r***(*n*)) = 0 then *f* = ***l***(*n*)

else *f* = *b*

end,

де *F*(*a*, *x*) ПРФ така, що рівняння *F*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок ⇔ *a* ∈ *A*, *b* ∈ *A*.

Ця функція ПРФ за побудовою. Крім того:

а) Значення цієї функції належать до *А*;

b) Якщо *m* – довільний елемент множини *А*, то рівняння *F*(*m*, *x*) = 0 має розв’язок *i*. Покладемо *n* = ***c***(*m*, *i*). Тоді значення функції *f* в точці *n* дорівнює *m*.

**Теорема 6.4.** Сума та перетин скінченної кількості РПМ є РПМ.

Доведення. Нехай *Аі* – РПМ, а *fі* – функції такі, що рівняння *fі*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок ⇔ *a* ∈ *Ai*. Тоді часткові характеристичні функції суми та перетину обчислюються алгоритмами:

а) function χ∪(*а*)

begin

*i* = 0

while *f*1(*a*, *i*) … *fn*(*a*, *i*) ≠ 0

do *i* = *i* + 1

χ∪ = 0

end.

b) function χ∩(*а*)

begin

*i* = 0

while *f*1(*a*, *i*) + … + *fn*(*a*, *i*) ≠ 0

do *i* = *i* + 1

χ∩ = 0

end.

**Теорема** **6.5** (Поста). Якщо множина *А* і її доповнення *А*′ рекурсивно перелічимі, то *А* і *А*′ рекурсивні.

Доведення. Розглянемо алгоритм обчислення функції *h*(*n*):

function *h*(*n*)

begin

*i* = 0

while |*f*(*i*) – *n*|| *f*′(*i*) – *n*| ≠ 0

do *i* = *i* + 1

*h* = *i*

end.

Тоді характеристичні функції множин *А* і *А*′ обчислюються алгоритмами:

а) function χ*А* (*n*)

begin

if |*f* (*h*(*n*)) – *n*| = 0 then χ*А* = 0

else χ*А* = 1

end.

b) function χ*А*′ (*n*)

begin

if |*f*′(*h*(*n*)) – *n*| = 0 then χ*А*′ = 0

else χ*А*′ = 1

end,

де *f*, *f*′ – ПРФ з множинами значень *А* і *А*′ відповідно.

Таким чином, доповнення РП множини яка не є рекурсивною не може бути РП множиною.

**Теорема 6.6.** Сукупність значень *М* ПР функції *F*(*x*1, …, *xn*) є РП множиною.

Доведення. Часткова характеристична функція множини *М* може бути обчислена алгоритмом:

function χ*М* (*n*)

begin

*i* = 0

while *F*(***c****n*1(*i*), … , ***c****nn* (*i*)) ≠ *n*

do *i* = *i* + 1

χ*M* = 0

end.